www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail

EPREUVE DE MATHEMATIQUES **PROGRAMME TB**

Durée : 4 heures

Calculatrices autorisées (circulaire n° 86-228 du 28 juillet 1986)

Dans tout le problème, α est un nombre réel et a est un nombre complexe non nul de partie réelle positive ou nulle.

IR est l'ensemble des réels et IR_+^* est l'ensemble des réels strictement positifs.

I

Dans cette partie le réel α n'est pas un entier relatif. On définit une application g de IR dans IR de période 2π par $g(x)=\cos(\alpha x)$ pour tout $x \in [-\pi, \pi[$.

1°) Montrer que g est continue et de classe C^1 par morceaux sur IR.

2°) En déduire que

$$\forall x \in IR \qquad g(x) = \frac{\sin(\alpha\pi)}{\pi}\left(\frac{1}{\alpha} + \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n \frac{2\alpha\cos(nx)}{\alpha^2 - n^2}\right)$$

où la série au deuxième membre est normalement convergente sur IR.

II

Dans cette partie, $\alpha \in]0, 1[$.

1°) Montrer que les intégrales $I(\alpha) = \int_0^1 \frac{x^{\alpha-1}}{1+x}\,dx$ et $J(\alpha) = \int_1^{+\infty} \frac{x^{\alpha-1}}{1+x}\,dx$

sont convergentes et que $J(\alpha) = I(1-\alpha)$

2°) Montrer que, pour tout entier naturel N,

$$\int_0^1 \frac{x^{\alpha-1}}{1+x}\,dx = \sum_{n=0}^{N}(-1)^n \int_0^1 x^{\alpha+n-1}\,dx + (-1)^{N+1}\int_0^1 \frac{x^{\alpha+N}}{1+x}\,dx$$

3°) Montrer que $\int_0^1 \frac{x^{\alpha+N}}{1+x}\,dx$ tend vers 0 quand N tend vers $+\infty$.

4°) Montrer que $\int_0^1 \frac{x^{\alpha-1}}{1+x}\,dx = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{\alpha+n}$

5°) Montrer que $\int_0^{+\infty} \frac{x^{\alpha-1}}{1+x}\,dx = \frac{1}{\alpha} + \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n \frac{2\alpha}{\alpha^2 - n^2}$

6°) Montrer que $\int_0^{+\infty} \frac{x^{\alpha-1}}{1+x}\,dx = \frac{\pi}{\sin(\alpha\pi)}$

Tournez la page S.V.P.

III

Dans cette partie, $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$

1°) Montrer que l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{t^{\alpha-1}}{t+a} e^{-xt}\, dt$ est absolument convergente pout tout $x \in \mathbb{R}_+^*$

Dans toute la suite du problème, on considère la fonction complexe de variable réelle f_α définie sur $\mathbb{R}_+^*$ (au moins) par $f_\alpha(x) = \int_0^{+\infty} \frac{t^{\alpha-1}}{t+a} e^{-xt}\, dt$

(la notation f_α sous-entend donc le paramètre a introduit au début du problème)

2°) Montrer que, pour tout $(u,v) \in \mathbb{R}^2$ $|e^u - e^v - (u-v)e^v| \leq \frac{(u-v)^2}{2} e^{\max(u,v)}$

3°) Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$; prouver l'existence d'un réel C_x tel que, pour tout $h \in \mathbb{R}$ vérifiant $|h| \leq \frac{x}{2}$, on ait $|f_\alpha(x+h) - f_\alpha(x) + h f_{\alpha+1}(x)| \leq C_x h^2$

4°) Montrer que f_α est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$

5°) f_α est-elle de classe C^∞ sur $\mathbb{R}_+^*$?

6°) Montrer que l'intégrale $\int_0^{+\infty} t^{\alpha-1} e^{-t}\, dt$ est convergente et strictement positive.

On pose **dans toute la suite du problème** $\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} t^{\alpha-1} e^{-t}\, dt$.

7°) Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $a\, f_\alpha(x) - f_\alpha'(x) = \frac{\Gamma(\alpha)}{x^\alpha}$

8°) Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $|f_\alpha(x)| \leq \frac{\Gamma(\alpha)}{|a|} x^{-\alpha}$

9°) Montrer que l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{e^{-at}}{t^\alpha}\, dt$ est convergente et que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$f_\alpha(x) = \Gamma(\alpha)\, e^{ax} \int_x^{+\infty} \frac{e^{-at}}{t^\alpha}\, dt$$

Tournez la page S.V.P.

IV

Dans cette partie, $\alpha \in]0,1[$; la notation f_α est introduite en III.1°) et la notation $\Gamma(\alpha)$ en III.6°)

1°) Prouver l'existence de $f_\alpha(0)$.

2°) Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $f_\alpha(0) - f_\alpha(x) = x^{1-\alpha} \int_0^{+\infty} \frac{u^{\alpha-1}}{u + ax} (1 - e^{-u})\, du$

3°) Montrer que l'intégrale $\int_0^{+\infty} u^{\alpha-2} (1 - e^{-u})\, du$ est convergente et vaut $\frac{\Gamma(\alpha)}{1 - \alpha}$

4°) Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $|f_\alpha(0) - f_\alpha(x)| \leq \frac{\Gamma(\alpha)}{1 - \alpha} x^{1-\alpha}$

5°) Montrer que $\int_0^{+\infty} \frac{t^{\alpha-1}}{t + a}\, dt = \Gamma(\alpha) \int_0^{+\infty} \frac{e^{-at}}{t^\alpha}\, dt$

6°) Montrer que $\Gamma(\alpha)\, \Gamma(1 - \alpha) = \frac{\pi}{\sin(\alpha \pi)}$

7°) Que vaut $\Gamma(\frac{1}{2})$?

8°) Montrer que l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-u^2}\, du$ est convergente et vaut $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$

9°) Calculer $\int_0^{+\infty} \frac{t^{\alpha-1}}{t - i}\, dt$ (séparer les parties réelles et imaginaires et utiliser II.6°))

10°) En déduire que $\int_0^{+\infty} \frac{e^{it}}{t^\alpha}\, dt = \Gamma(1 - \alpha)\, e^{i\frac{\pi}{2}(1-\alpha)}$

11°) Quelles valeurs obtient-on pour les intégrales $\int_0^{+\infty} \frac{\cos t}{\sqrt{t}}\, dt$ et $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{\sqrt{t}}\, dt$?

12°) Montrer que les intégrales $\int_0^{+\infty} \cos(x^2)\, dx$ et $\int_0^{+\infty} \sin(x^2)\, dx$ sont convergentes et valent toutes deux $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}$.

* *

*

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail